Os Números de Liouville

Ricardo Emanuel Mueller; Prof. Felipe Vieira

UFSC Blumenau

Resumo

A ideia de números transcendentes existe desde Euler, mas somente em 1851, com Joseph Liouville, que obtivemos a forma de alguns deles. O objetivo deste trabalho é apresentar estes números, conhecidos como *Números de Liouville*. Apesar de Georg Cantor provar que o conjunto dos números reais transcendentes tem cardinalidade $\aleph_1$, demonstrar a transcendência de um número real é consideravelmente mais difícil que mostrar sua irracionalidade. Neste ponto, os *Números de Liouville* são o que temos de mais simples na teoria dos números transcendentes. Para ilustrar o caso é necessária uma introdução sobre enumerabilidade de conjuntos e alguns tipos de aproximações.

Aspectos Históricos

A palavra transcender vem do latin transcendĕre, que significa "ir além de", "ser superior a". A busca pelos números transcendentes começa por volta do Século XVIII com Johann Heinrich Lambert. Em 1768 Lambert conjecturou a transcendentalidade de π e e, sendo que quase 7 anos antes havia demonstrado a irracionalidade de π, e propôs uma tentativa de prova disto. Mas foi em 1844, com Joseph Liouville, que a demonstração da existência de números transcendentes tomou forma e, mais tarde (1851), ele mesmo descobriu o primeiro número transcendente, a *Constante de Liouville*. Logo após (1873), Charles Hermite mostrou a transcendentalidade de e, sendo este o primeiro número não especificamente construído para verificação, e em 1882 a ideia de transcendentalidade de π foi confirmada por Ferdinand Von Lindemann. O tema foi ganhando notoriedade com a abordagem de Cantor (1874), que confirmou a não-enumerabilidade do conjunto dos números trascendentes, e culminou na formulação do 7º problema de Hilbert que, por sua vez, foi parcialmente resolvido por Alexander Gelfond e Theodor Schneider e expandido por Alan Baker (feito que contribuiu para sua obtenção da medalha fields em 1970).

Introdução

Para falarmos sobre os Números de Liouville propriamente é de suma importância compreendermos o que são números transcendentes e mostrarmos que eles realmente existem.

Definição 1: Chamamos de *Número Algébrico* todo número complexo que é raiz, real ou imaginária, de qualquer equação polinomia não nula cujos coeficientes são números inteiros.

Definição 2: Denominamos *Número Transcendente* um número complexo que não é algébrico.

Teorema 1: O conjunto dos números algébricos é enumerável.

Prova: Dado um polinômio com coeficientes inteiros

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

sua *altura* é definida como

$$|P| = |a_n| + \ldots + |a_1| + |a_0| + n\,.$$

Sabemos pelo TFA (Teorema Fundamental da Álgebra) que $P(x) = 0$ possui precisamente n raízes complexas. Temos então até n raízes reais. Por combinatória sabemos que o número de polinômios com coeficientes inteiros de dada altura é finito. Assim, o conjunto das raízes dos polinômios com uma determinada altura também é finito. Portanto, o conjunto de todas as raízes de todos os polinômios de todas as alturas é um conjunto enumerável, pois é a união de um conjunto enumerável de conjuntos finitos. ■

Aqui a teoria dos números transcendentes vive um dilema: se a maioria dos números complexos é transcendente, por que é tão complicado mostrar que um número é, de fato, transcendente?

Aproximações

Aproximando Irracionais por Racionais

Perceba que todo número irracional está entre dois números inteiros, mas nunca exatamente no meio deles. Assim, obtemos o seguinte resultado:

Teorema 2: Para todo número irracional α, existe um único inteiro m tal que

$$|\alpha - m| < \frac{1}{2}.$$

Pelo fato de $n\alpha$ também ser um número irracional para todo natural não nulo, temos o seguinte corolário:

Corolário 1: Dados um número irracional α e um número natural não nulo n, existe um número racional m/n tal que

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{2n}\,.$$

Corolário 2: Dados um número irracional α e um natural não nulo k, existe um número racional m/n, cujo denominador não excede k, de modo que

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{nk}\,.$$

Teorema 3: Dado um número irracional α, existem infinitos números racionais m/n, na forma irredutível, que satisfazem

$$\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{n^2}\,.$$

Números Aproximáveis

Definição 3: É dito que um número real α é *aproximável na ordem n por racionais* se existirem uma constante real $c > 0$ e uma sucessão (p_j/q_j), com $q_j > 0$, de racionais distintos e irredutíveis tais que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{c}{{q_j}^n}\,, n \in \mathbb{N}^*.$$

Perceba que se um número é aproximável na ordem n, então ele também é aproximável em qualquer ordem menor que n e, em especial, quando o expoente for 0, ou seja,

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < c\,.$$

Assim, a sucessão (q_j) não se mantém limitada, quando $q_j \to +\infty$.

Teorema 4: (i) Qualquer número racional é aproximável na ordem 1 por racionais. (ii) Nenhum número racional é aproximável na ordem n por racionais, para $n \geq 2$.

Teorema 5: Para todo número algébrico real α, com n sendo o grau da equação polinomial com coeficientes inteiros de menor grau cujo α é raiz, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Aq^n}, \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\,.$$

Caso $n = 1$, considere $p/q \neq \alpha$.

Prova: Seja o número α raiz da seguinte equação polinomial com coeficientes inteiros:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0\,.$$

Então existe $d > 0$ tal que α seja a única raiz de $f(x) = 0$ no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$. Note que, como $f'(x)$ é um polinômio de grau $n-1$, temos também que existe $M > 0$ de modo que

$$|f'(x)| < M, x \in [\alpha - d, \alpha + d]\,.$$

Seguindo, aplicando o TVM (teorema do valor médio) para qualquer racional $p/q \in [\alpha - d, \alpha + d]$, $q > 0$, temos

$$f(\alpha) - f(p/q) = (\alpha - p/q) f'(y),\ y \in (\alpha - d, \alpha + d)\,.$$

Como $f(\alpha) = 0$, temos

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| |f'(y)| \leq M \left|\alpha - \frac{p}{q}\right|\,.$$

Por outro lado, como $f(p/q) \neq 0$, segue que

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{a_n p^n + a_{n-1} q p^{n-1} + \ldots + a_0 q^n}{q^n}\right| \geq \frac{1}{q^n}\,.$$

Destas duas desigualdades acima podemos concluir então que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^n}\,.$$

Mas caso p/q não esteja no intervalo $[\alpha - d, \alpha + d]$, então

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > d \implies \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{d}{q^n}\,.$$

Logo, basta substituirmos $\frac{1}{A}$ pelo menor dos números $\frac{1}{M}$ e d para chegarmos no que queríamos, provar para todos os racionais. ■

Os Números de Liouville

Definição 4: O número real α é denominado *número de Liouville* se existir uma sucessão (p_j/q_j), $q_j > 0$, de racionais distintos e irredutíveis de tal modo que

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{{q_j}^j}\,, \forall j > 1.$$

Lema 1: Dado um número real α tal que

$$\left|\alpha - \frac{v_j}{u_j}\right| < \frac{1}{{u_j}^j}.$$

com (v_j/u_j) sendo uma sucessão de racionais distintos (possivelmente redutíveis) e $u_j > 0$. Temos então que α é um número de Liouville.

Exemplo 1: Todo número da forma $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^{k!}}$, onde a_k é um algarismo de 1 a 9, é um número de Liouville. Em especial o número

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

é chamado de *Constante de Liouville*. Pode ser verificado que a *Constante de Liouville* é um número de Liouville a partir do Lema acima.

Teorema 6: Todos os números de Liouville são transcendentes.

Prova: Suponha que um número de Liouville α é algébrico. Então α é raiz de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Tome n como o grau da equação polinomial de menor grau cujo α é raiz. Assim, pela definição de número de Liouville e pelo Teorema 5 segue que

$$\frac{1}{A{q_j}^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{{q_j}^j}\,.$$

Logo, temos que:

$$\frac{1}{A{q_j}^n} < \frac{1}{{q_j}^j} \implies {q_j}^{j-n} < A\,.$$

Isto é um absurdo, pois $q_j \to +\infty$ para j suficientemente grande. Portanto, α é transcendente. ■

Referências

[1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Número Irracionais e Transcendentes. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 81 p. (Coleção de Iniciação Científica).

[2] NIVEN, Ivan. Números: Racionais e Irracionais. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 175 p. (Coleção de Iniciação Científica). Tradução de: Renate Watanabe.

[3] MARQUES, Diego. Teoria dos Números Transcendentes. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 223 p. (Textos Universitários).